METODY OBLICZENIOWE OPTYMALIZACJI

ZADANIA LABORATORYJNE

Przedstawione dalej zadania rozwiąż wykorzystując Matlab oraz Excel (lub Open/Libre Office Calc) z funkcją Solver.

Zadania 1–13 są zadaniami optymalizacji liniowej, zadania 14–16 dotyczą optymalizacji nieliniowej.

Przed przystąpieniem do rozwiązania zapoznaj się z matematycznymi funkcjami Excela: MACIERZ.ILOCZYN, SUMA.ILOCZYNÓW oraz z narzędziem Solver. Zapoznaj się również z funkcjami *linprog*, *intlinprog*, *quadprog* oraz *lsqlin* programu Matlab. Informacje uzyskasz korzystając z opcji pomocy lub dokumentacji Matlaba.

W języku Python istnieją odpowiedniki powyższych funkcji matlabowych. Są to:
- `linprog` – `scipy.optimize.linprog`
- `intlinprog` – `scipy.optimize.linprog` + parametr `integrality`
- `lsqlin` – `scipy.optimize.lsq_linear`
- `quadprog` – `qpsolvers.solve_qp`

Instalacja modułów:
- `pip install scipy[stubs]`
- `pip install qpsolvers[quadprog]`

Jeśli prowadzący wyrazi zgodę, można używać powyższych funkcji do rozwiązywania zadań zamiast ich odpowiedników matlabowych.

Zad. 1

W fabryce wytwarza się produkty I i II. Wytworzenie jednostki produktu I wymaga zużycia 8 jednostek surowca A i 2 jednostki surowca B. Wyprodukowanie zaś jednostki produktu II – 5 jednostek surowca A i 5 jednostek surowca B. Dostawy surowców w każdym dniu wynoszą odpowiednio 40 jednostek surowca A i 25 jednostek surowca B. Zysk ze sprzedaży jednostki produktu I wynosi 9 zł, produktu II 8 zł. Zakładając, że cała dzienna produkcja zostanie sprzedana, wyznacz jej wysokość w odniesieniu do każdego produktu, by otrzymać maksymalny zysk.

Zad. 2

Rozwiąż zad. 1. zakładając, że wysokości dziennej produkcji produktu I i produktu II są liczbami całkowitymi.

Zad. 3

Dyrekcja przedsiębiorstwa rozważa podjęcie produkcji trzech nowych wyrobów W_1, W_2, W_3. O ewentualnym ograniczeniu produkcji tych wyrobów stanowią zasoby dwóch surowców S_1 i S_2. Miesięczne limity surowców wynoszą: S_1 – 3600 kg, S_2 – 4800 kg. Normy zużycia surowców przy produkcji poszczególnych wyrobów podano w tab. 1. Zysk osiągany na jednostce wyrobu W_1 wynosi 10 zł, W_2 – 24 zł, W_3 – 12 zł. Które z wyrobów i w jakiej ilości powinno produkować przedsiębiorstwo, by osiągnąć maksymalny zysk, nie przekraczając zużycia surowców S_1 i S_2?

Tab. 1

Surowce	**Zużycie surowców (kg/jedn.)**		
	W_1	W_2	W_3
S_1	5	3	0
S_2	1	2	4

Zad. 4

Dwa gatunki węgla: A i B zawierają zanieczyszczenia fosforem i popiołem. W pewnym procesie przemysłowym potrzeba co najmniej 90 t paliwa zawierającego nie więcej niż 0.03% fosforu i nie więcej niż 4% popiołu. Procent zanieczyszczeń i ceny zakupu poszczególnych gatunków węgla podano w tab. 2. Jak zmieszać wymienione dwa gatunki węgla, aby uzyskać paliwo o możliwie najniższym koszcie, spełniające wyżej wymienione wymagania?

Tab. 2

Węgiel	**Procentowe zanieczyszczenie**		**Cena w zł/t**
	fosforem	popiołem	
A	0.02	3	100
B	0.05	5	80

Zad. 5

Na trzech typach krosien można produkować pięć rodzajów tkanin. Wydajność krosien w m/h przy produkcji poszczególnych tkanin oraz dopuszczalne czasy pracy krosien podano w tab. 3. Należy rozdzielić produkcję tkanin między poszczególne typy krosien tak, aby wyprodukować co najmniej 1120 m tkaniny 1, 1260 m tkaniny 2, 1800 m tkaniny 3, 1200 m tkaniny 4 i 720 m tkaniny 5, minimalizując łączny czas pracy krosien.

Tab. 3

Krosno	**Wydajność w m/h przy produkcji tkaniny**					**Dopuszczalny czas pracy w h**
	1	2	3	4	5	
A	5	10	8	12	6	600
B	7	7	12	10	8	840
C	8	9	10	11	9	720

Zad. 6

Dane są cztery typy przedmiotów. Każdy typ jest scharakteryzowany przez ciężar i wartość jednej sztuki o następujących danych liczbowych (ciężar, wartość): (4, 5), (2, 3), (6, 4), (5, 8). Należy wybrać liczbę sztuk poszczególnych typów tak, by łączny ciężar nie przekraczał 12 a łączna wartość była maksymalna.

Zad. 7

Tartak otrzymał zamówienie na wykonanie co najmniej 300 kompletów belek. Każdy komplet składa się z 7 belek o dł. 0.7 m oraz 4 belek o dł. 2.5 m. W jaki sposób powinno być zrealizowane zamówienie, by odpad powstały w procesie cięcia dłużyc o dł. 5.2 m był minimalny? Ile wyniesie wielkość odpadu przy optymalnym cięciu?

Wskazówka: Rozpocznij od ustalenia sposobów cięcia dłużyc.

Zad. 8

Do wyprodukowania drążków o trzech długościach: 0.6 m, 1.5 m, 2.5 m, których ilości powinny odpowiadać proporcjom 2:1:3 przeznacza się 1000 prętów o długości 3 m. Należy określić program cięcia prętów zapewniający maksymalną liczbę kompletów drążków.

Wskazówka 1: Rozpocznij od ustalenia sposobów cięcia.

Wskazówka 2: Jeden komplet jest równy liczbie drążków o długości 1.5 m (zgodnie z proporcją 2:1:3).

Zad. 9

Do pojemników o objętości 40 cm^3 należy zapakować 4 rodzaje przedmiotów o objętościach, odpowiednio: 21 cm^3, 12 cm^3, 11 cm^3, 8 cm^3 w ilościach, odpowiednio: 6, 6, 6, 12 sztuk. Ustalone przez producenta pięć sposobów pakowania określa macierz $A=[a_{ij}]$, w której a_{ij} oznacza liczbę sztuk i–tego przedmiotu, zapakowanych do jednego pojemnika według j–tego sposobu ($i = 1,...,4,\ j = 1,...,5$)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Ile pojemników należy zapakować każdym ze sposobów, by łączna ich liczba była jak najmniejsza?

Zad. 10

Wyznacz najkrótszą drogę z Warszawy do Sofii na podstawie danych z tab. 4, przedstawiających odległości między miastami pośrednimi. Podróżować można jedynie od miasta w pierwszej kolumnie do miasta z tego samego wiersza drugiej kolumny. Narysuj odpowiedni graf skierowany, ponumeruj jego węzły, zapisz zadanie jako problem binarnej optymalizacji liniowej i rozwiąż je.

Tab. 4

Początek odcinka drogi	**Koniec odcinka drogi**	**Odległość w km**
Warszawa	Katowice	300
Warszawa	Zakopane	402
Warszawa	Lwów	356
Katowice	Wiedeń	440
Katowice	Budapeszt	474
Zakopane	Budapeszt	330
Lwów	Bukareszt	823
Wiedeń	Zagrzeb	430
Budapeszt	Zagrzeb	365
Budapeszt	Bukareszt	813
Budapeszt	Sofia	774
Zagrzeb	Sofia	768
Bukareszt	Sofia	403

Zad. 11

Rozwiąż zadanie znalezienia najtańszej drogi (analogicznie do zadania najkrótszej drogi) z węzła 1 do węzła 6 w sieci scharakteryzowanej w tab. 5. Podobnie jak w zad. 15. można poruszać się od węzła z kolumny pierwszej do odpowiedniego węzła z kolumny drugiej. W trzeciej kolumnie podano koszty przejścia. Narysuj graf, zapisz problem binarnej optymalizacji liniowej i rozwiąż go.

Tab. 5

Węzeł początkowy	**Węzeł końcowy**	**Koszt w zł**
1	2	24 000
1	3	48 320
2	3	25 920
2	4	52 186
3	4	27 993
3	5	56 360
4	5	30 233
4	6	60 869
5	6	32 652

Zad. 12

Dana jest sieć scharakteryzowana w tab. 6, w której zestawiono numery węzłów początkowych, numery węzłów końcowych i przepustowości łuków. Sporządź odpowiedni graf oraz rozwiąż zadanie maksymalnego przepływu. Wyznacz optymalne przepływy przez poszczególne gałęzie. Jako źródło przyjmij węzeł 1, jako ujście – węzeł 6.

Tab. 6

Węzeł początkowy	**Węzeł końcowy**	**Przepustowość**
1	2	3
1	3	4
2	4	4
3	4	5
3	5	3
4	5	2
4	6	2
5	6	4

Zad. 13

Wyznacz maksymalny przepływ i odpowiadające mu przepływy przez gałęzie sieci scharakteryzowanej w tab. 7. Źródłem jest węzeł 1, ujściem węzeł 6.

Tab. 7

Węzeł początkowy	1	1	2	2	3	4	4	5	5
Węzeł końcowy	2	3	3	4	5	3	6	4	6
Przepustowość	7	3	1	6	8	3	2	2	8

Zad. 14

Wykonaj minimalizację następujących funkcji przy użyciu funkcji *quadprog* w programie Matlab. Jako punkt startowy przyjmij [0, 0, 0].

a)
Funkcja celu:

$$f(x) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 7x_2x_3 + 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \rightarrow min$$

Ograniczenia:

$$-7x_1 - 2x_2 - x_3 \leq -89$$
$$2x_1 \geq 6$$
$$4x_2 \geq 12$$
$$x_3 \geq 6$$

b)
Funkcja celu:

$$f(x) = 3x_1^2 + x_2^2 + 0.5x_3^2 + 3x_1x_2 + x_2x_3 + 2x_1 + 5x_2 \rightarrow min$$

Ograniczenia:

$$-5x_1 - x_2 - 2x_3 \leq -89$$
$$3x_1 \geq 7$$
$$2x_2 \geq 10$$
$$x_3 \geq 8$$

Zad. 15

W fabryce produkuje się dwa rodzaje komponentów: A i B. Koszt produkcji jednostki komponentu zależy od całkowitej liczby wyprodukowanych sztuk zgodnie z następującymi zależnościami:

- całkowity koszt produkcji komponentu A to $2x_1^2 + 4x_1$ zł, gdzie x_1 to liczba jednostek komponentu A;

- całkowity koszt produkcji komponentu B to $3x_2^2 + 3x_2$ zł, gdzie x_2 to liczba jednostek komponentu B.

Cena sprzedaży wynosi odpowiednio:

- 12 zł za jednostkę komponentu A,
- 10 zł za jednostkę komponentu B.

Zasoby dostępne dla produkcji są ograniczone:

- produkcja komponentu A nie może przekroczyć 15 jednostek;
- produkcja komponentu B nie może przekroczyć 10 jednostek;
- całkowita liczba wyprodukowanych jednostek obu komponentów nie może przekroczyć 20.

Zdefiniuj odpowiedni model programowania kwadratowego, który maksymalizuje zysk fabryki (różnica między przychodami a kosztami produkcji) i rozwiąż go za pomocą *quadprog*, przyjmując zera jako punkt startowy.

Zad. 16

Wykonaj minimalizację następującej funkcji przy użyciu funkcji *lsqlin* w programie Matlab.

Funkcja celu:

$$f(x) = (x_1 + 2x_2 - 7)^2 + (3x_1 + 4x_2 - 8)^2 + (5x_1 + 6x_2 - 9)^2 \rightarrow min$$

Ograniczenia:

$$x_1 + x_2 \leq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Zad. 17

Wytwórnia pasz planuje wyprodukować 100 kg nowej mieszanki dla zwierząt. Ze względów dietetycznych pożądane jest, aby nowa mieszanka jak najdokładniej odpowiadała idealnemu profilowi odżywczemu. Idealny profil dla 100 kg mieszanki wynosi:

- 3500 jednostek białka,
- 4500 jednostek węglowodanów,
- 2000 jednostek tłuszczu.

Do produkcji mieszanki fabryka wykorzystuje cztery dostępne surowce S1, S2, S3, S4). Zawartość składników odżywczych w 1 kg każdego surowca przedstawia się następująco:

- surowiec S1: 40 j. białka, 30 j. węglowodanów, 10 j. tłuszczu;
- surowiec S2: 20 j. białka, 60 j. węglowodanów, 20 j. tłuszczu;
- surowiec S3: 50 j. białka, 20 j. węglowodanów, 30 j. tłuszczu;
- surowiec S4: 10 j. białka, 40 j. węglowodanów, 50 j. tłuszczu.

Ze względów technologicznych oraz trawiennych nałożono następujące ograniczenia:

- łączna masa wyprodukowanej paszy musi wynosić dokładnie 100 kg;
- ilość surowca S4 w mieszance nie może przekroczyć 15 kg.

Ponieważ idealne zbilansowanie składników odżywczych może być niemożliwe przy dostępnych surowcach i nałożonych ograniczeniach, zdefiniuj odpowiedni model matematyczny, który zminimalizuje sumę kwadratów odchyleń między uzyskaną w mieszance ilością białka, węglowodanów i tłuszczu, a ich idealnym profilem. Rozwiąż ten problem za pomocą funkcji *lsqlin*.

Zad. 18

Popyt na pewne dobro w kolejnych latach scharakteryzowano w Tab. 8.

Tab. 8

rok t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
popyt p	5	22	85	238	426	648	959	1295	1698	2078

Metodą najmniejszych kwadratów znajdź parametry następujących modeli:

a) $p = \alpha t + \beta$ b) $p = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ c) $p = \alpha t^{\beta}$ d) $p = \alpha e^{\beta t}$

Który z modeli najlepiej odpowiada danym z tabeli? Zadanie rozwiąż korzystając z opcji Excela „wstaw linię trendu" lub Libre/Open Office Calca „wstaw krzywą regresji".

Za pomocą najlepiej dopasowanego modelu oblicz prawdopodobny popyt w jedenastym roku ($t = 11$).